

Solutie problema Mexitate

Autor: Posdarascu Eugenie Daniel – Universitatea din Bucuresti

Solutie 20 de puncte:

Pentru fiecare submatrice de $K * L$, se parcurg elementele si se pun intr-un vector de frecventa. Pentru a determina raspunsul (primul element lipsa), este suficient sa parcurgem vectorul de frecventa si sa aflam prima pozitie cu frecventa 0.

Solutie 100 de puncte:

Solutia se bazeaza folosind urmatoarele 3 optimizari:

1. Presupunem ca avem vectorul de frecventa pentru o submatrice. In momentul in care mutam matricea la dreapta (de exemplu), vectorul de frecventa se schimba cu foarte putine elemente. Mai exact, coloana din stanga dispare si apare noua coloana din dreapta. In total, avem doar $2 * k$ elemente pe care trebuie sa le modificam. Analog, cand mutam matricea in jos, avem $2 * l$ elemente pe care trebuie sa le modificam.

Putem parcurge submatricele in uratorul mod:

- pornesc cu matricea din coltul (1,1)
- matricea se muta din stanga in dreapta pana ajunge in capat
- coboram matricea cu o unitate
- matricea se muta din dreapta in stanga pana ajunge in capat
- coboram matricea cu o unitate
- revenim la pasul 2

Observam ca mutarea la stanga-dreapta o facem de ordinul $O(N * M)$, iar mutarea in jos de ordinul $O(N)$. Complexitatea pana in acest punct devine $O(N * M * K + N * L)$, ignorand momentan partea in care trebuie sa determinam rapid mex-ul din vectorul de frecventa.

2. Avem restrictia $N * M \leq 400.000$

$\Rightarrow K * L \leq 400.000$

$\Rightarrow \min(K, L) \leq \sqrt{400.000}$

Daca $K \leq L$

$\Rightarrow k \leq \sqrt{400.000} = \sqrt{VMAX} \Rightarrow$ complexitatea devine $O(N * M * \sqrt{VMAX} + N * L)$

In schimb, daca $K > L$ este nevoie sa rotim matricea si sa aplicam acelasi procedeu, complexitatea devenind $O(N * M * L + M * K)$, adica $O(N * M * \sqrt{VMAX} + M * K)$.

Aplicand acest hibrid, complexitatea devine $O(\min(N * M * \sqrt{VMAX} + N * L, N * M * \sqrt{VMAX} + M * K))$. Din moment ce $N * L$ respectiv $M * K$ sunt irelevante, complexitatea finala va fi: $O(N * M * \sqrt{VMAX})$.

3. Ramane de vazut cum putem determina rapid care este mex-ul cu ajutorul vectorul de frecventa (din moment ce acesta este foarte mare, nu putem merge element cu element).

Aplicand primele 2 observatii, deducem ca avem $O(N * M * \sqrt{VMAX})$ valori care se modifica (update-uri), respectiv $O(N * M)$ interogari de mex (query-uri).

Putem echilibra aceasta complexitate daca am avea o structura ce foloseste $O(1)$ pe update si $O(\sqrt{VMAX})$ pe query. Putem tine bucati de dimensiune \sqrt{VMAX} pe vectorul de frecventa, fiecare bucata avand marcata cate elemente apar cel putin o data. Vectorul de frecventa si informatie pentru fiecare bucata de radical se pot mentine usor la update in $O(1)$. La query, pentru fiecare bucata de radical putem sa o sarim daca toate elementele apar in acel interval, respectiv sa aplicam un brute-force daca raspunsul este in interiorul acelui interval. Mai exact, sarim elemente din radical in radical (vom face asta de maxim \sqrt{VMAX} ori), respectiv cautam element cu element intr-un interval de lungime radical. Astfel, vom putea determina valoarea mex-ului in maxim \sqrt{VMAX} pasi.